МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE



УДК 62.752, 621:534.833;888.6 10.23947/1992-5980-2017-17-3-46-59

Устройства для преобразования движения в структуре диады механической колебательной системы*

С. В. Елисеев[1], А. И. Орленко[2], Д. Х. Нгуен[3]**

[1,3] Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

[2] Красноярский институт железнодорожного транспорта Иркутского государственного университета путей сообщения, Российская Федерация

Motion translation devices in dyad structure of mechanical oscillatory system***

S. V. Eliseev[1], A. I. Orlenko[2], D. H. Nguyen[3]**

[1,3] Irkutsk State Railway Transport Engineering University, Russian Federation

[2] Krasnoyarsk Institute of Rail Transport, Branch of Irkutsk State Transport Engineering University, Russian Federation

Введение. Рассматриваются возможности создания новых подходов в оценке динамических свойств механических колебательных систем. Цель исследований заключается в разработке метода построения математических моделей механических колебательных систем с несколькими степенями свободы, основанного на представлениях о системообразующих фундаментальных возможностях диад как структурных образований, определяющих особенности состояний исходной системы в целом.

Материалы и методы. Используются подходы и приемы структурного математического моделирования, в рамках которых механической колебательной системе сопоставляется эквивалентная в динамическом отношении структурная схема системы автоматического управления. Оценка динамических свойств и вводимых дополнительных связей основана на применении передаточных функций, амплитудно-частотных характеристик и технологий частотного анализа.

Результаты исследования. Доказаны возможности изменения динамических свойств систем путем введения дополнительных связей, реализующих преобразования состояний во взаимодействиях элементов на основе эффектов двойного дифференцирования. Показаны возможности изменений, которые могут быть инициированы устройствами для преобразования движения.

Обсуждение и заключения. Разработан метод построения математических моделей диад и технология оценки их динамических свойств. Предложены физически реализуемые схемы конструктивно-технических решений на основе устройств для преобразования движения.

Introduction. The possibilities of creating new approaches to the evaluation of the dynamic properties of mechanical oscillation systems are considered. The research objective is to develop a method for constructing mathematical models of mechanical oscillatory systems with several degrees of freedom based on the concepts of system-forming fundamental capabilities of dyads as certain structural formations that determine features of the states of the initial system as a whole.

Materials and Methods. Approaches and techniques of the structural mathematical modeling are used, within which a mechanically oscillating system is compared with a dynamically equivalent structural diagram of an automatic control system. Estimation of the dynamic properties and introduced additional couplings is based on the application of transfer functions, amplitude-frequency characteristics, and frequency analysis technologies.

Research Results. The changeability of the dynamic system properties through introducing additional constraints that realize the transformation of states in the interactions of elements on the basis of double differentiation effects is proved. The possibilities of changes that can be initiated by devices for converting motion are shown.

Discussion and Conclusions. A technique for building mathematical models of dyads, and a technology for estimating their dynamic properties are developed. Physically realizable schemes of the design engineering solutions based on motion translation devices are proposed.

Ключевые слова: диада, устройство для преобразования движения, структурная схема, передаточная функция.

Keywords: dyad, motion translation device, structural chart, transfer function.

Образец для цитирования: Елисеев, С. В. Устройства для преобразования движения в структуре диады механической колебательной системы / С. В. Елисеев, А. И. Орленко, Д. Х. Нгуен // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2017. — Т.17, № 3. — С. 46–59.

For citation: S. V. Eliseev, A. I. Orlenko, D. H. Nguyen. Motion translation devices in dyad structure of mechanical oscillatory system. Vestnik of DSTU, 2017, vol. 17, no.3, pp. 46–59.

http://vestnik.donstu.ru

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР (рег. номер АААА-А16-116112350117-7).

** E-mail: eliseev_s@inbox.ru, Orlenko_AI@krsk.irgups.ru, Huynhnd1987@gmail.com

*** The research is done within the frame of the independent R&D (reg. no. АААА-А16-116112350117-7).

Введение. Вопросы о расширении элементной базы механических колебательных систем давно привлекают внимание и неоднократно рассматривались с позиций возможности развития обобщенных подходов в системах многофункционального назначения, что нашло отражение в работах по структурному математическому моделированию [1–3]. В последние годы наметился интерес к детализации представлений о принципах динамических аналогий и формах их реализации в теории цепей и в различных приложениях. Интерпретации механических колебательных систем на основе аппарата теории автоматического управления рассмотрены в работах, ориентированных на решение задач динамического синтеза виброзащитных систем [4–6], что инициирует внимание к поиску и детализации представлений о взаимодействиях типовых элементов. В частности, интерес представляет рассмотрение диад как типовых фундаменто-образующих структур линейных механических колебательных систем. Вместе с тем диады, как структуры, обладающие двумя степенями свободы, могут, в свою очередь, содержать не только упругие и массоинерционные элементы обычного вида, но и типовые элементы, реализующие функции преобразования движения [1, 3, 5]. В настоящей работе рассматриваются особенности динамических свойств диад в линейных механических колебательных системах цепного типа, содержащих в своем составе устройства для преобразования движения.

I. Общие положения. Постановка задачи исследования. Рассмотрим механическую линейную колебательную систему с двумя степенями свободы, продемонстрированную на рис. 1. На систему действуют гармонические внешние силы Q_1 и Q_2, приложенные непосредственно к массоинерционным элементам m_1 и m_2. В системе имеются упругие элементы с жесткостями k_1, k_2, k_3, а также устройство для преобразования движения с приведенной массой L [1, 5].

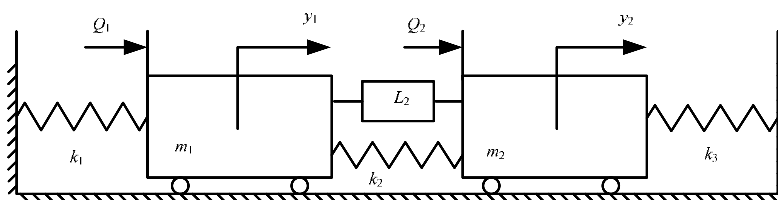


Рис. 1. Принципиальная схема механической колебательной системы, содержащей диаду (m_1, k_2, m_2, L)

Fig. 1. Block diagram of mechanical oscillatory system containing dyad (m_1, k_2, m_2, L)

Используя технологии структурного математического моделирования [3, 5], основанные на применении уравнений Лагранжа 2-го рода и последующих преобразований Лапласа, получим в качестве модели структурную схему эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2).

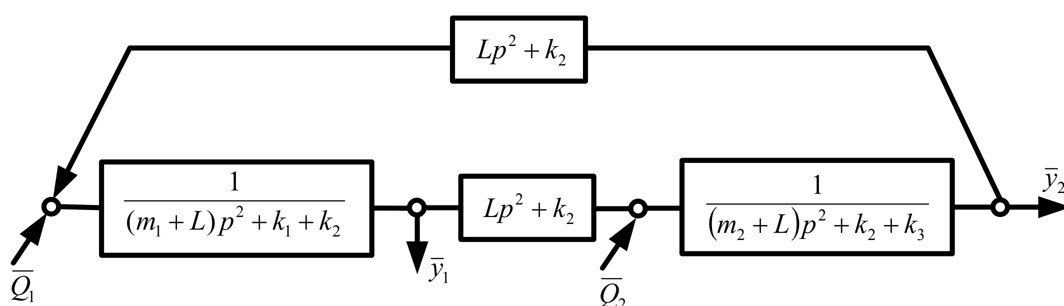


Рис. 2. Структурная схема системы с устройствами преобразования движения

Fig. 2. Structural diagram of system with motion translation devices

Рассматриваемая система обладает линейными свойствами и совершает малые колебания относительно положения статического равновесия. На рис. 2 приняты следующие обозначения: $p = j\omega$ — комплексная переменная; значок <–> соответствует изображению переменной по Лапласу. Понятие о приведенной массе L устройства для преобразования движения более подробно рассматривается в [7]. Отметим, что устройство для преобразования движения (УПД) может быть реализовано в различных конструктивно-технических формах, например, в виде рычажных, зубчатых или винтовых несамотормозящихся механизмов.

Используя структурную схему (рис. 2), можно получить передаточные функции исходной системы, полагая что $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ являются выходными сигналами, а внешние воздействия $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ — входными. Принимая для упрощения, что $\bar{Q}_1 \neq 0$ ($\bar{Q}_2 = 0$), запишем передаточные функции:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + Lp^2 + k_2 + k_3}{A(p)}; \tag{1}$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{Lp^2 + k_2}{A(p)}; \tag{2}$$

где

$$A(p) = (m_1 p^2 + Lp^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + Lp^2 + k_2 + k_3) - (Lp^2 + k_2)^2 \tag{3}$$

— характеристическое частотное уравнение системы.

Кроме передаточных функций (1), (2) в рассмотрение вводится передаточная функция межпарциальных связей:

$$W_{12}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{Lp^2 + k_2}{m_2 p^2 + Lp^2 + k_2 + k_3}. \tag{4}$$

В случае одновременного действия двух сил $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ возможно использование принципа суперпозиции [8]. Отметим, что простые формы преобразований реализуются в случаях, когда обе внешние силы имеют одну частоту и действуют синхронно.

Задача исследования заключается в разработке метода оценки динамических свойств диады с устройством для преобразования движения и использования динамических эффектов для режима прикладных задач динамики вибрационных технологических машин.

II. Диада и ее динамические свойства. Диада рассматривается как структурное образование из типовых элементов с передаточными функциями инерционных звеньев m_1, m_2, упругого звена k_2 и УПД. Отметим, что диада, как некоторое структурное образование, находится «в изоляции» от связей с опорными поверхностями ($k_1 = 0$, $k_3 = 0$). При этом не учитываются силы сопротивления со стороны опорной горизонтальной поверхности.

Структурная схема диады и некоторые формы её преобразований приведены на рис. 3, *а*, *б*, *в*.

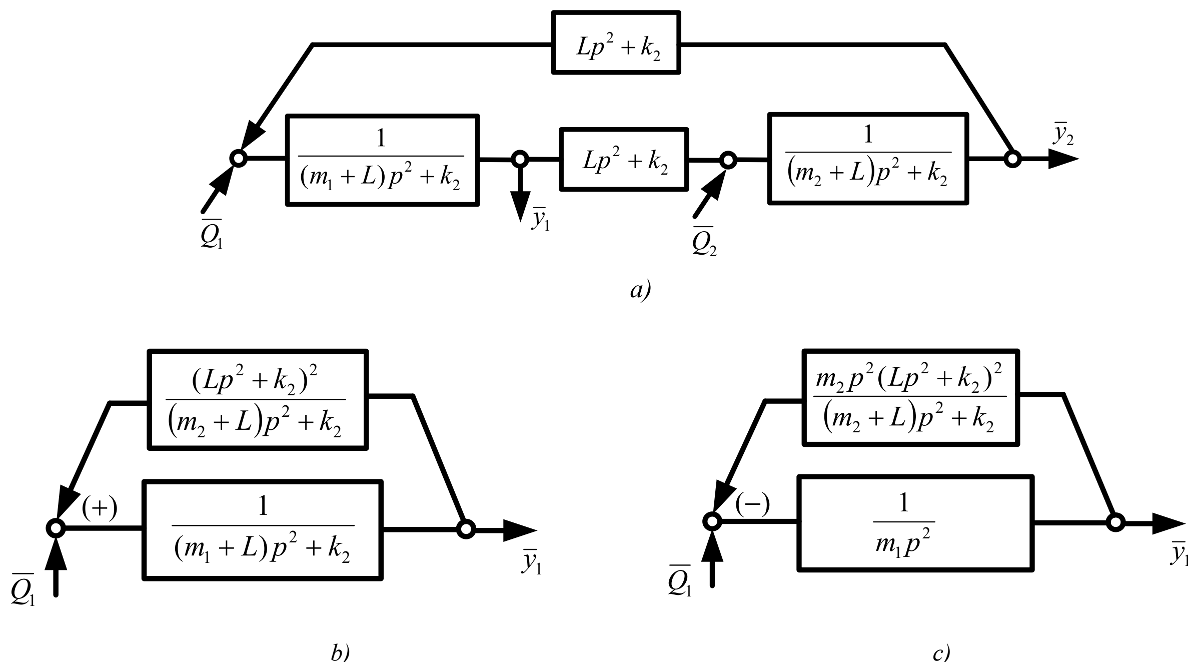


Рис. 3. Структурная схема диады: *a)* общий вид; *b)* структурная схема диады при исключении координат $\bar{y}_2$; *c)* структурная схема системы с выделением объекта вибрационной защиты m_1

Fig. 3. Dyad structural scheme: a) – general form; b) – dyad structure when excluding coordinates $\bar{y}_2$; c) – system structural scheme with allocation of vibration protection object m_1

Передаточные функции диады на основе использования структурных схем (рис. 3, *а, б, в*) принимают вид:

$$W_{1\partial}(p)=\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}=\frac{m_2p^2+Lp^2+k_2}{A_1(p)}, \tag{5}$$

$$W_{2\partial}(p)=\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}=\frac{Lp^2+k_2}{A_1(p)}, \tag{6}$$

$$W_{12\partial}(p)=\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}=\frac{Lp^2+k_2}{m_2p^2+Lp^2+k_2}, \tag{7}$$

где

$$A_1(p)=(m_1p^2+Lp^2+k_2)(m_2p^2+Lp^2+k_2)-(Lp^2+k_2)^2 \tag{8}$$

— характеристическое частотное уравнение диады.

Выражение (8) может быть упрощено и приведено к виду:

$$p^4[m_1m_2+L(m_1+m_2)]+p^2k_2(m_1+m_2)=0\,. \tag{9}$$

Из (9) следует, что система имеет циклическую координату. Это обеспечивает возможность рассмотрения диады в рамках прямолинейного поступательного перемещения как некоторого установившегося движения. При этом в соответствии с характеристическим уравнением будет верно равенство:

$$p^2\{[m_1m_2+L(m_1+m_2)]p^2+k_2(m_1+m_2)\}=0\,. \tag{10}$$

Из (9), (10) очевидно, что диада имеет одну частоту собственных колебаний $\omega_{1\partial}^2=0$. Вторая частота собственных колебаний диады определяется выражением:

$$\omega_{2\partial}^2=\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1m_2+L(m_1+m_2)}\,. \tag{11}$$

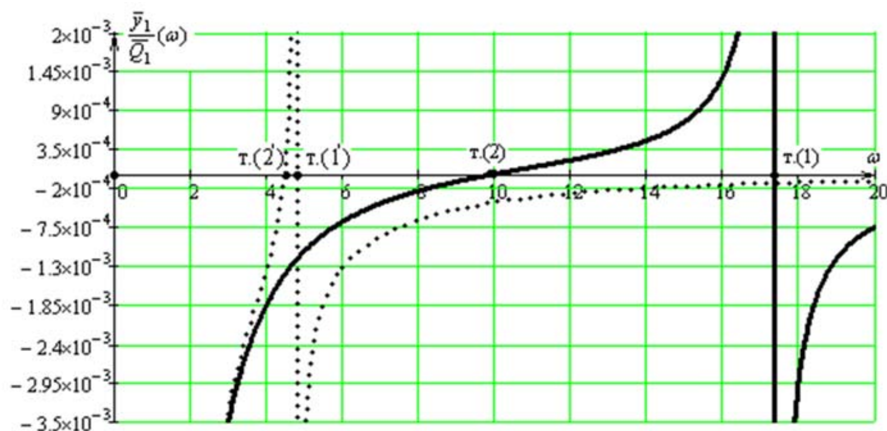
Если считать, что диада имеет без УПД приведенную массу

$$m_{пр}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \tag{12}$$

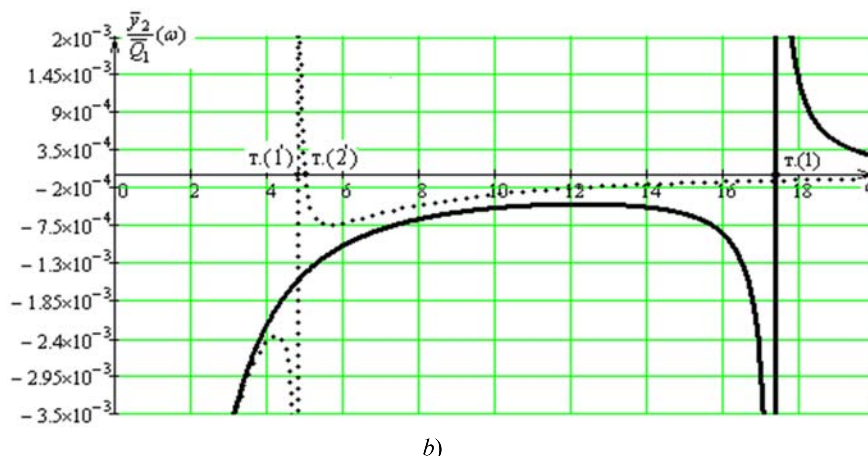
то с учетом (11) приведенная масса диады с УПД составит

$$m_{пр\ УПД}=m_{пр}+L\,. \tag{13}$$

Введение УПД в диаду уменьшает частоту собственных колебаний и вид амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) системы. На рис. 4, *а*, *б* приведены для сравнения АЧХ обычного вида и АЧХ с введенными УПД.



а)



b)

Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики диады:
a — АЧХ по координате y_1; *b* — АЧХ по координате y_2 (▬ — при $L = 0$, •••••• — при $L = 80$ кг)

Fig. 4. Dyad amplitude-frequency characteristics:
a – AFC in coordinate y_1; b – AFC in coordinate y_2 (▬ – at L = 0, •••••• – at L = 80 kg*)*

Для модельной задачи принято, что $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 20$ кг, $k_2 = 2000$ Н/м; приведенная масса L принимает два значения — $L = 0$ и $L = 80$ кг. Графики амплитудно-частотных характеристик $\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}(\omega)$ при $L = 0$ и $L = 80$ кг имеют отличия. Частоты собственных колебаний определяются положением точек (1) и (1') на оси абсцисс. При увеличении L значение частоты собственных колебаний уменьшается. При $L = 0$ график $\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}(\omega)$ пересекается с осью абсцисс в точке (2). При увеличении L эта точка перемещается в точку (2') (рис. 4, *а*). Характерно, что при увеличении L значения частоты динамического гашения колебаний и частоты собственных колебаний сближаются.

Графики АЧХ $\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}(\omega)$ (рис. 4, *б*) при $L = 0$ и $L = 80$ кг имеют характерные точки (1) и (1') на оси абсцисс, определяющие значения частот собственных колебаний. При $L = 0$ график $\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}(\omega)$ не имеет пересечений с осью абсцисс. Вместе с тем график $\frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1}(\omega)$ при $L = 80$ кг имеет пересечение с осью абсцисс в точке (2'), что свидетельствует о возникновении режима динамического гашения колебаний. Таким образом, параметр УПД, называемый приведенной массой L, может существенно изменять свойства диады и влиять на особенности движений системы в целом.

Отметим также, что точка (2') на рис. 4, *б* находится правее точки (1'), что свидетельствует о наличии особых режимов динамического взаимодействия элементов диады. Для диады без УПД АЧХ имеют вид, характерный для систем с одной степенью свободы. При этом полагается, что циклическое движение может на данном этапе исследования не рассматриваться.

С учетом УПД движение по координате $\bar{y}_1$ имеет частоту динамического гашения:

$$\omega_{1дин}^2 = \frac{k_2}{m_2 + L}. \quad (14)$$

При этом частота собственных колебаний определяется выражением:

$$\omega_{соб\ д}^2 = \frac{k_2}{L + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}. \quad (15)$$

При частоте возмущения $\omega \to \infty$, система «запирается» и $W_{1\partial}(p)$ стремится к значению

$$\underset{p\to\infty}{W_{1\partial}(p)} = \frac{m_2 + L}{m_1 m_2 + L(m_1 + m_2)}. \quad (16)$$

По координате $\bar{y}_2$ режим динамического гашения колебаний определится выражением:

$$\omega_{2дин}^2 = \frac{k_2}{L}; \quad (17)$$

соответственно на высоких частотах получим:

$$W_{\substack{2\partial \\ p\to\infty}}(p) = \frac{L}{m_1 m_2 + L(m_1 + m_2)}. \quad (18)$$

Таким образом, введение УПД привносит в диаду новые динамические эффекты. В частности, возможным становится динамическое гашение колебаний по координате y_2 (17), изменяются также значения парциальных частот диады и ее собственной частоты.

Передаточная функция межпарциальных связей с учетом УПД имеет вид, определяемый выражением (7), из которого следуют особенности динамических взаимодействий в межкоординатных связях $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Характерным является «обнуление» (7) или ситуация, когда $\bar{y}_2 = 0$, что не является возможным в диадах без устройств для преобразования движения. При $p \to 0$, соотношения амплитуд $\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = 1$, а при $p \to \infty$, $\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{L}{m_2 + L}$, что можно рассматривать как форму проявления рычажных связей [9, 10].

Одновременное действие двух внешних силовых факторов не изменяет характеристическое частотное уравнение диады, но влияет на формы передаточных функций. Примем, что $\bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}_1$, тогда

$$W'_{1\partial}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{(m_2 + L)p^2 + k_2 + \alpha(Lp^2 + k_2)}{A(p)}; \quad (19)$$

$$W'_{2\partial}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{[(m_1 + L)p^2 + k_2]\alpha + Lp^2 + k_2}{A(p)}; \quad (20)$$

$$W'_{12\partial}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{[(m_1 + L)p^2 + k_2]\alpha + Lp^2 + k_2}{(m_2 + L)p^2 + k_2 + \alpha(Lp^2 + k_2)}. \quad (21)$$

При действии двух силовых факторов частоты собственных колебаний не изменяются. При этом изменяются частоты динамического гашения колебаний. По координате y_1 имеем:

$$\omega^2_{1дин\,\partial} = \frac{k_2(1+\alpha)}{m_2 + L(1+\alpha)}. \quad (22)$$

По координате y_2 соответственно получим:

$$\omega^2_{2дин\,\partial} = \frac{k_2(1+\alpha)}{\alpha m_1 + L(1+\alpha)}. \quad (23)$$

Отметим, что одновременное действие двух силовых факторов без сдвига по фазе можно рассматривать как способ изменения параметров приведенной жесткости системы, а также как способ изменения приведенных масс системы.

Для случая $\omega^2_{1дин\,\partial} = \omega^2_{2дин\,\partial}$ можно получить следующее уравнение связности:

$$\frac{k_2(1+\alpha)}{m_2 + L(1+\alpha)} = \frac{k_2(1+\alpha)}{\alpha m_1 + L(1+\alpha)}, \quad (24)$$

откуда следует, что

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}. \quad (25)$$

Если выполняется условие $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$, то в системе реализуется особый динамический режим, при котором $\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = 1$, что соответствует движению объекта по двум координатам как «единое целое», то есть имеет место синфазное движение с одинаковыми амплитудами. Аналогичным образом могут быть получены и другие формы движений.

III. Использование энергетической функции. Если рассматривать диаду с УПД, то в системе координат y_1, y_2 её кинетическая и потенциальная энергии определяются выражениями:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}L(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2, \quad (26)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2. \quad (27)$$

Частотная энергетическая функция может быть записана в виде:

$$\omega^2 = \frac{k_2(y_2 - y_1)^2}{(m_1 + L)\dot{y}_1^2 + (m_2 + L)\dot{y}_2^2 - 2L\dot{y}_1\dot{y}_2}. \quad (28)$$

Введем понятие коэффициента связности координат:

$$i = y_2 / y_1, \quad (28')$$

тогда

$$\omega^2 = \frac{k_2(i-1)^2}{m_1 + m_2 i^2 + L(i-1)^2}. \quad (29)$$

Рассмотрим, как влияет L на коэффициент формы связи координат i. Если УПД нет, то $L = 0$, а (29) примет вид:

$$\omega^2 = \frac{k_2(i-1)^2}{m_1 + m_2 i^2}. \quad (30)$$

Сравнивая с частотой собственных колебаний, определенной выше, получим:

$$\frac{k_2(i-1)^2}{m_1 + m_2 i^2} = \frac{k_2}{\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}, \quad (31)$$

откуда следует, что

$$i = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (32)$$

Если в диаду ввести УПД, то (31) трансформируется к виду:

$$\frac{k_2(i-1)^2}{m_1 + m_2 i^2 + L(i-1)^2} = \frac{k_2}{L + \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}, \quad (33)$$

откуда найдем, что значение i не зависит от L

$$i = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (34)$$

На рис. 5 приведены результаты решения уравнения (29) по определению значений коэффициента связности i при различных значениях L (в модельной задаче приняты: m_1 = 10 кг, m_2 = 20 кг, k_2 = 2000 Н/м, L = 0, 10, 20, 50 кг).

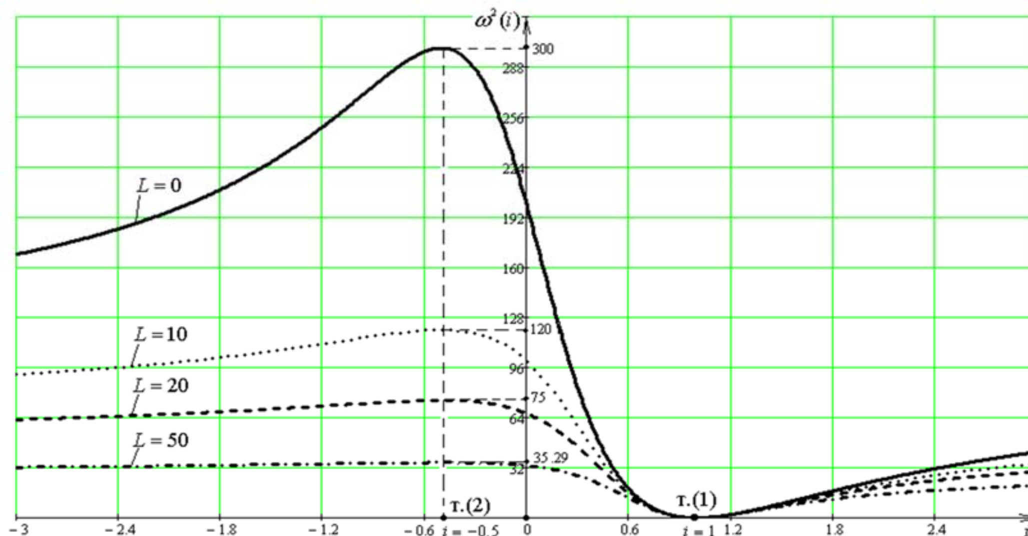


Рис. 5. Графики зависимости $\omega^2(i)$ при различных значениях L

Fig. 5. Dependency graphs $\omega^2(i)$ at different values of L

Из графиков на рис. 5 очевидно, что динамическое состояние диады не может находиться в форме колебаний, когда i = 1, поэтому все графики $\omega^2(i)$ при различных значениях L пересекаются в одной точке (1) на оси абсцисс (i = 1); при этом $\omega^2_{\text{соб}} = 0$ при всех значениях L. В данном случае это означает, что система имеет циклическую координату, характеризующую установившееся равномерное прямолинейное движение. Вместе с тем все графики с различными значениями L имеют экстремальные свойства при i = –0.5, что следует из выражения (34). Таким образом,

учет L (приведенная масса УПД) не приводит к изменению связности координат i, но при этом изменяются соответствующим образом значения частот собственных колебаний диады. При увеличении L частоты собственных колебаний диады уменьшаются (в пределе до нулевых значений), что связано с представлениями о получении очень низких частот при $L \to \infty$.

При $i = 0$, что соответствует $\frac{y_2}{y_1} = 1$, частоты собственных колебаний определяются вышеприведенным выражением (29). При $i \to +\infty$ из (29) следует, что

$$\omega^2_{i \to +\infty} = \frac{k_2}{m_2 + L}. \tag{35}$$

Отметим, что графики на рис. 5 при $i \to -\infty$ будут также стремиться к пределу $\frac{k_2}{m_2 + L}$, определяемому выражением (35), что соответствует парциальной частоте системы, состоящей из элементов m_2, k_2 и L.

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) диады при внешнем силовом возмущении к элементу m_1 приведены на рис. 6, *а*, *б*, *в*, *г*, где значение приведенной массы L изменяется в пределах $L = 0$ (рис. 6, *а*); $L = 10$ кг (рис. 6, *б*); $L = 20$ кг (рис. 6, *в*); $L = 50$ кг (рис. 6, *г*).

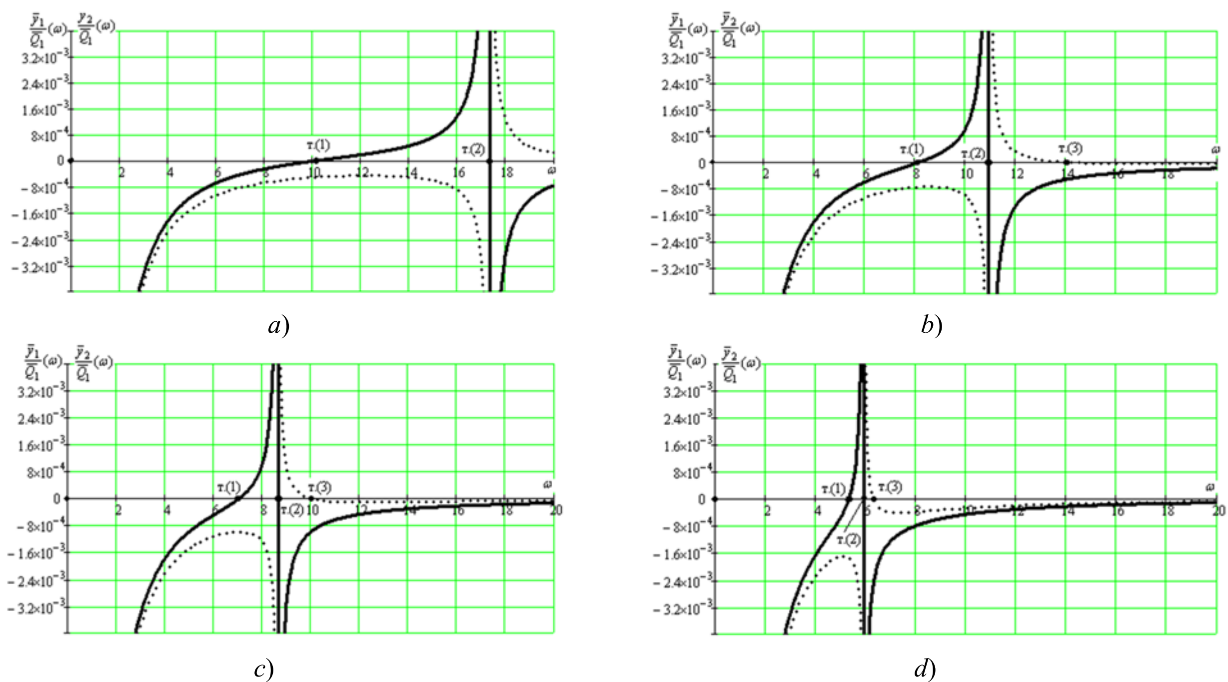


Рис. 6. Формы амплитудно-частотных характеристик диады при различных значениях приведенной массы устройства для преобразования движения L: *a*) $L = 0$; *b*) $L = 10$ кг; *c*) $L = 20$ кг; *d*) $L = 50$ кг
(сплошная линия (▬) соответствует графику зависимости по координате $\bar{y}_1$;
точечная линия (······) соответствует по координате $\bar{y}_2$)

Fig. 6. Forms of dyad amplitude-frequency characteristics at different values of reduced mass of motion translation device L: a – L = 0; b – L = 10 kg*; c – L = 20* kg*; d – L = 50* kg
(solid line (▬) corresponds to dependency graph in coordinate $\bar{y}_1$*;*
dotted line (······) corresponds to the one in coordinate $\bar{y}_2$*)*

АЧХ на рис. 6, *а* отображают динамические свойства без УПД при значениях параметров $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 20$ кг, $k_2 = 2000$ Н/м. В рассматриваемом случае система имеет одну частоту собственных колебаний ($\omega_2 \neq 0$), которая определяется точкой (2) на оси частот. В движениях по координате y_1 реализуется режим динамического гашения колебаний точки (1) на оси частот. Движение по координате y_2 происходит без режима динамического гашения колебаний, но АЧХ по координате y_1 имеет характерную форму с наличием минимального значения $\frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1}$.

Введение УПД с приведенными массами $L = 0$, 10, 20, 50 кг, что отображается на АЧХ, приведенных на рис. 6, приводит к появлению ряда новых динамических эффектов. Это связано с проявлениями режимов динамического гашения колебаний по координате y_1. При этом значение частоты собственных колебаний $\omega_2 \neq 0$ сдвигается в область более низких значений (точка (1) на рис. 6). На графиках АЧХ при $L \neq 0$, частоты динамического гашения ко-

лебаний (т. (3) на рис. 6, *б*, *в*, *г*) сдвигаются в сторону расположения точки (2), определяющей частоту собственных колебаний. Отметим, что сближение частот динамического гашения колебаний и собственных колебаний не является приемлемым для решения ряда задач динамики из-за возможностей проявления свойств, характерных для форм неустойчивых движений [11].

IV. Возможности физической реализации диады с использованием рычажных механизмов. Рассмотрим пример реализации диады в структуре динамического корректора колебаний в виброзащитной системе с двумя степенями свободы. На рис. 7 рассматривается механическая колебательная система с двумя степенями свободы как расчетная схема некоторого технического объекта массой m_2, который опирается на УПД рычажного типа. Такое устройство является стержнем, на одном конце которого размещен груз массой m_0 с возможностями изменения расстояния l_2 до точки вращения (точка В). В точке А (рис. 7) рычаг имеет связь в виде кинематической пары V класса (вращательная) с объектом защиты (АВ = l_1). Одновременно в точке В рычаг соединяется вращательной кинематической парой с промежуточной массой m_1. В системе используются четыре упругих элемента с жесткостями k_1, k_2, k_3 и k_4 (рис. 7). Движение системы описывается в системе координат y_0, y_1, y_2, связанной с неподвижным базисом; при этом положению объекта защиты m_2 соответствует координата y_2, положению рычага — y_0, промежуточной массы — y_1. В качестве внешнего возмущения рассматриваются гармонические колебания опорной поверхности $z(t)$. Система обладает линейными свойствами и совершает малые колебания относительно положения устойчивого статического равновесия.

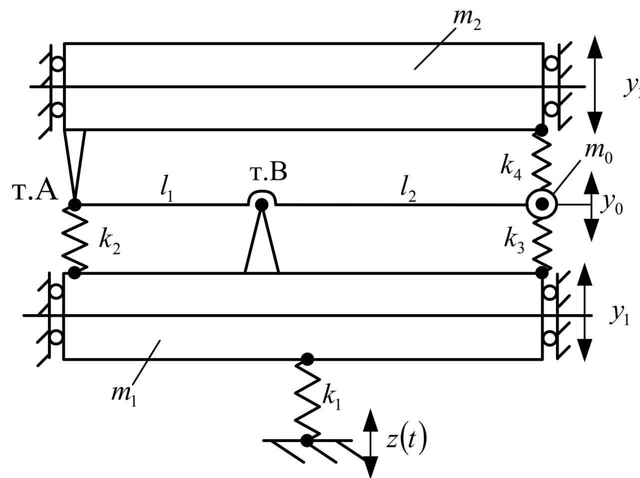


Рис. 7. Принципиальная схема виброзащитной системы технического объекта с УПД

Fig. 7. Block diagram of vibration protection system of technical object with motion translation device

В системе координат y_1 и y_2 выражения для кинетической и потенциальной энергий имеют вид:

$$\text{Т} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_0\dot{y}_0^2, \tag{36}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(y_2 - y_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(y_0 - y_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_4\left(y_2 - y_0\right)^2. \tag{37}$$

С учетом кинематических соотношений сложного движения (36), (37) и введением коэффициента рычажной связи $i_p = \frac{l_2}{l_1}$ получим:

$$\text{Т} = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_0\left[\dot{y}_1\left(1+i_p\right) - \dot{y}_2 i_p\right]^2, \tag{38}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z\right)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 i_p^2(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(1+i_p)^2\cdot(y_2 - y_1)^2. \tag{39}$$

В данном случае уравнения движения системы принимают вид:

$$\ddot{y}_1\left[m_1 + m_0\left(i_p+1\right)^2\right] + y_1\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 i_p^2 + \\ +k_4\left(i_p+1\right)^2\end{bmatrix} - \ddot{y}_2 m_0 i_p\left(i_p+1\right) - y_2\begin{bmatrix} k_2 + k_3 i_p^2 + \\ +k_4\left(1+i_p\right)^2\end{bmatrix} = k_1 z(t), \tag{40}$$

$$\ddot{y}_2\left(m_2 + m_0 i_p^2\right) + y_2\begin{bmatrix} k_2 + k_3 i_p^2 + \\ +k_4\left(1+i_p\right)^2\end{bmatrix} - \ddot{y}_1 m_0 i_p\left(i_p+1\right) - y_1\begin{bmatrix} k_2 + k_3 i_p^2 + \\ +k_4\left(1+i_p\right)^2\end{bmatrix} = 0. \tag{41}$$

На основании дифференциальных уравнений (40), (41) после преобразований Лапласа [3, 5] может быть построена структурная схема (рис. 8), которая имеет две координаты $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Что касается координаты $\bar{y}_0$, то она связана с $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ следующими соотношениями:

$$y_0 = y_1\left(1+i_p\right) - y_2 i_p. \tag{42}$$

Коэффициенты уравнений (40) и (41) в операторной форме приводятся в таблице 1.

Таблица 1

Table 1

Коэффициенты уравнений (40), (41) в координатах $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$

Coefficients of equations (40), (41) in coordinates $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$

a_{11}	a_{12}
$\left[m_1 + m_0\left(i_p+1\right)^2\right]p^2 + k_1 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(i_p+1\right)^2$	$-[m_0 i_p\left(i_p+1\right)p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(1+i_p\right)^2]$
a_{21}	a_{22}
$-[m_0 i_p\left(i_p+1\right)p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(1+i_p\right)^2]$	$\left(m_2 + m_0 i_p^2\right)p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(1+i_p\right)^2$
$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$
$k_1 z(t)$	0

Примечание: $p = j\omega$ — комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$); символ <–> над переменной означает её изображение по Лапласу [3, 5].

Структурная схема системы в соответствии с данными таблицы 1 имеет вид, проиллюстрированный на рис. 8. При частоте

$$\omega_{\text{меж}}^2 = \frac{k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(1+i_p\right)^2}{m_0 i_p\left(i_p+1\right)} \tag{43}$$

межпарциальная связь «обнуляется» и система принимает вырожденную форму. В общем случае по каждой из координат возможны режимы динамического гашения колебаний на частотах

$$\omega_{1\text{дин}}^2 = \frac{k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(1+i_p\right)^2}{m_2 + m_0 i_p^2}, \tag{44}$$

$$\omega_{2\text{дин}}^2 = \frac{k_2 + k_3 i_p^2 + k_4\left(1+i_p\right)^2}{m_0 i_p\left(i_p+1\right)}. \tag{45}$$

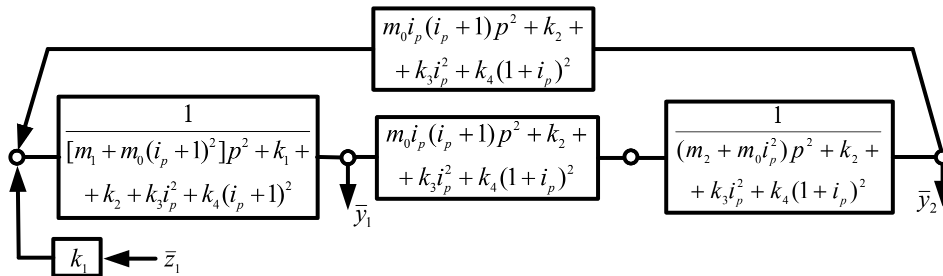


Рис. 8. Структурная математическая модель механической колебательной системы, изображенной на рис. 7

Fig. 8. Structural mathematical model of mechanical oscillatory system pictured in Fig. 7

Передаточные функции системы при кинематическом возмущении определяются из структурной схемы и имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{(m_2 + m_0 i_p^2)p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4(1+i_p)^2}{A(p)}, \tag{46}$$

$$W_2(p) = \frac{\overline{y}_2}{k_1 \overline{z}_1} = \frac{m_0 i_p (i_p + 1) p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2}{A(p)}, \tag{47}$$

Введем понятие передаточной функции межпарциальных связей:

$$W_{12}(p) = \frac{\overline{y}_2}{\overline{y}_1} = \frac{m_0 i_p (i_p + 1) p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2}{(m_2 + m_0 i_p^2) p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2}, \tag{48}$$

где

$$A(p) = \{[m_1 + m_0 (i_p + 1)^2] p^2 + k_1 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (i_p + 1)^2\} \times \\ \times [(m_2 + m_0 i_p^2) p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2] - [m_0 i_p (i_p + 1) p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2]^2 \tag{49}$$

— характеристическое частотное уравнение системы.

Если $i_p = 0$, то выражения (46), (47) трансформируются к виду:

$$W_1(p) = \frac{\overline{y}_1}{k_1 \overline{z}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_4}{A'(p)}, \tag{50}$$

$$W_2(p) = \frac{\overline{y}_2}{k_1 \overline{z}_1} = \frac{k_2 + k_4}{A'(p)}, \tag{51}$$

где

$$A'(p) = [(m_1 + m_0) p^2 + k_1 + k_2 + k_4] \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_4) - (k_2 + k_4)^2 \tag{52}$$

— характеристическое частотное уравнение исходной системы при $i_p = 0$.

Парциальные частоты системы в общем случае определяются выражениями:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (i_p + 1)^2}{m_1 + m_0 (i_p + 1)^2}, \tag{53}$$

$$n_2^2 = \frac{k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2}{m_2 + m_0 i_p^2}. \tag{54}$$

При $k_1 = 0$ структурная схема на рис. 8 преобразуется в структурную схему диады, приведенную на рис. 9.

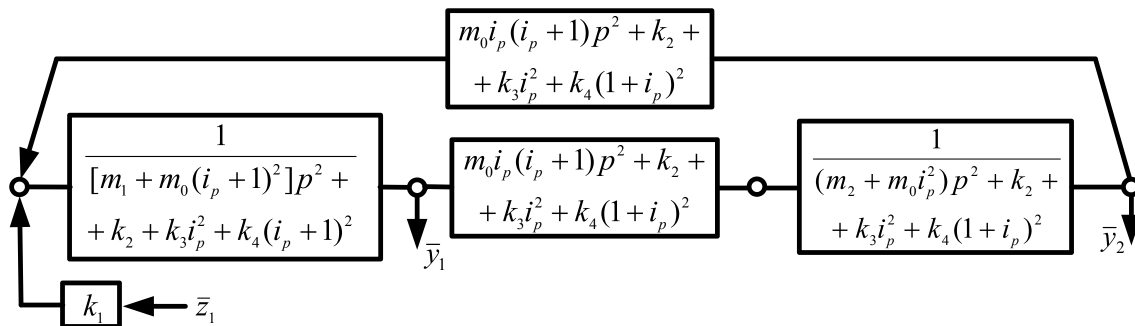


Рис. 9. Структурная схема диады в общем виде

Fig. 9. Dyad structural diagram in general form

Переход к унифицированной форме диады осуществляется на основе формальных приемов, которые заключаются в выделении для передаточных функций парциальных систем фрагментов, имеющих вид передаточных функций межпарциальных связей. Таким образом, по координате $\overline{y}_1$ справедливо выражение:

$$[m_1 + m_0 (i_p + 1)^2] p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (i_p + 1)^2 = m_1 p^2 + m_0 (i_p + 1) p^2 + m_0 i_p (i_p + 1) p^2 + k_0 = \\ = [m_1 + m_0 (i_p + 1)] p^2 + m_0 i_p (i_p + 1) p^2 + k_0 = [m_1 + m_0 (i_p + 1)] p^2 + L p^2 + k_0. \tag{55}$$

В свою очередь, по координате $\overline{y}_2$ получаем равенство:

$$(m_2 + m_0 i_p^2) p^2 + k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (1 + i_p)^2 = (m_2 - m_0 i_p) p^2 + m_0 i_p (i_p + 1) p^2 + k_0 = \\ = (m_2 - m_0 i_p) p^2 + L p^2 + k_0. \tag{56}$$

Структурная схема (рис. 9) на основе выражений (55), (56) преобразуется к виду, изображенному на рис. 10.

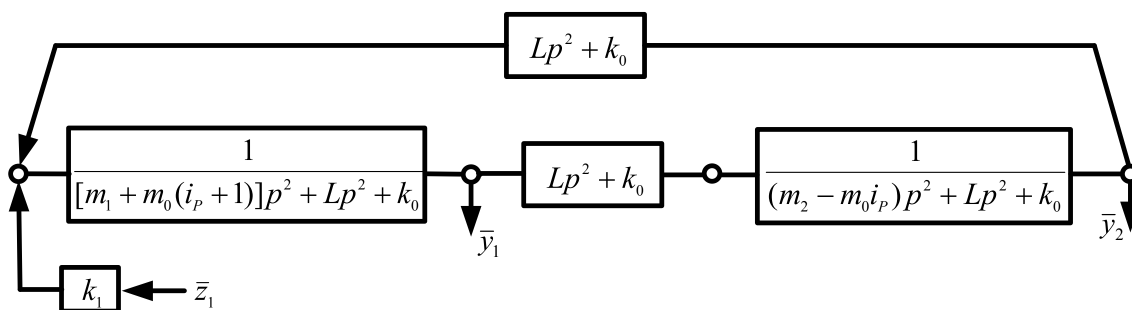


Рис. 10. Структурная схема диады с устройством для преобразования движения

Fig. 10. Dyad structural diagram with motion translation device

Таким образом, в составе расчетной схемы в виде механической колебательной системы с двумя степенями свободы (рис. 7), имеющей рычажный механизм второго рода может быть выделена диада. В диаде кроме обычных массоинерционных элементов $m_1' = m_1 + m_0(i_p + 1)$ и $m_2' = m_2 - m_0 i_p$ содержится УПД с передаточной функцией

$$L = m_0 i_p (i_p + 1), \qquad (57)$$

а также обобщенная пружина с коэффициентом жесткости k_0, который соответствует жесткости трех параллельно соединенных пружин:

$$k_0 = k_2 + k_3 i_p^2 + k_4 (i_p + 1)^2. \qquad (58)$$

При «обнулении» k_2, k_3, k_4 и m_0 система превращается в обычную диаду, рассмотренную в предыдущих разделах статьи.

Заключение. Диада в механических колебательных системах представляет собой структурное образование, которое в составе механических колебательных систем может рассматриваться как системообразующий элемент, предопределяющий динамические свойства системы в целом.

Доказано, что диада может быть выделена из исходной системы и представлена в условиях изоляции от связей с внешними элементами и опорными поверхностями, либо рассматриваться во взаимодействиях с такими поверхностями без учета сил сопротивления. В рамках такого подхода диада представляет собой систему с двумя степенями свободы, в которой соединение массоинерционных элементов происходит через линейную пружину.

Авторами развиты и детализированы представления о динамических свойствах диад, включающих в свой состав дополнительные связи, введенные параллельно упругому элементу, реализуемые в виде устройств для преобразования движения. Представлены структурные математические модели в динамическом отношении эквивалентные структурным схемам систем автоматического управления. Усилительное звено рассматривалось как эквивалент пружины, а звено УПД — как типовое звено структурной модели, имеющее передаточную функцию дифференцирующего элемента второго порядка.

Введение такого рода связей в структуру диады существенным образом изменило набор её динамических свойств по сравнению с обычными подходами. Показано, что устройство для преобразования движения с передаточной функцией дифференцирующего звена второго порядка может быть практически реализовано с использованием рычажных механизмов.

Таким образом, предложен метод построения математической модели диады общего вида: произведена оценка динамических свойств диад, выявлены новые динамические эффекты, отражающие возможности учета особенностей форм движения элементов диады и совместного действия внешних сил, что создает возможности для поиска и разработки новых подходов в управлении динамическим состоянием механических колебательных систем.

Библиографический список

1. I. A. Karnovsky, E. Lebed, Theory of vibration protection, doi 10.1007/978-3-319-28020-2. Switzerland, 2016. — 669 p.

2. De Silva, C. W. Vibration. Fundamentals and Practice / Clarence W. de Silva. — Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. — 957 p.

3. Елисеев, С. В. Динамическое гашение колебаний : концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования / С. В. Елисеев, А. П. Хоменко. — Новосибирск : Наука, 2014. — 357 с.

4. Галиев, И. И. Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей / И. И. Галиев, В. А. Нехаев, В. А. Николаев. — Москва : Учебно-методический центр по образованию на ж.-д. трансп., 2010. — 340 с.

5. Елисеев, С. В. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С. В. Елисеев, Ю. И. Резник, А. П. Хоменко, А. А. Засядко. — Иркутск : ИГУ, 2008. — 523 с.

6. Генкин, М. Д. Упруго-инерционные виброизолирующие системы. Предельные возможности, оптимальные структуры / М. Д. Генкин, В. М. Рябой. — Москва : Наука, 1988. — 191 с.

7. Eliseev S. V., Lukyanov A. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P. Dynamics of mechanical system with additional ties. Irkutsk, 2006. — 315 p.

8. Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы / Д. П. Ким. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 288 с.

9. Каимов, Е. В. Оценка динамических свойств в системе с рычажными связями / Е. В. Каимов, А. И. Артюнин // Информационные и математические технологии в науке и управлении : труды XIX Байкальской Всероссийской конф. — Иркутск, 2014. — С. 123–130.

10. Каимов, Е. В. Особенности рычажных связей в схемах подвесок и приборов / Е. В. Каимов, В. Б. Кашуба // Перспективы развития и эффективность функционирования транспортного комплекса юга России : труды межд. научно-практ. конф. — Ростов-на-Дону, 2015. — С. 224–226.

11. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949. – 458 p.

References

1. Karnovsky, I.A., Lebed, E. Theory of vibration protection. Switzerland, 2016, 669 p.

2. De Silva, C. W. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000, 957 p.

3. Eliseev, S.V., Khomenko, A.P. Dinamicheskoe gashenie kolebaniy: kontseptsiya obratnoy svyazi i strukturnye metody matematicheskogo modelirovaniya. [Dynamic oscillation suppression: feedback concept and structural methods of mathematical modeling.] Novosibirsk: Nauka, 2014, 357 p. (in Russian).

4. Galiev, I.I., Nekhaev, V.A., Nikolaev, V.A. Metody i sredstva vibrozashchity zheleznodorozhnykh ekipazhey. [Methods and means of vibration protection of railway vehicles.] Moscow: Uchebno-metodicheskiy tsentr po obrazovaniyu na zh.-d. transp., 2010, 340 p. (in Russian).

5. Eliseev, S.V., Reznik, Y.I., Khomenko, A.P., Zasyadko, A.A. Dinamicheskiy sintez v obobshchennykh zadachakh vibrozashchity i vibroizolyatsii tekhnicheskikh ob"ektov. [Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects.] Irkutsk: IGU, 2008, 523 p. (in Russian).

6. Genkin, M.D., Ryaboy, V.M. Uprugo-inertsionnye vibroizoliruyushchie sistemy. Predel'nye vozmozhnosti, optimal'nye struktury. [Elastic-inertial vibration isolation systems. Limiting possibilities, optimal structures.] Moscow: Nauka, 1988, 191 p. (in Russian).

7. Eliseev S. V., Lukyanov A. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P. Dynamics of mechanical system with additional ties. Irkutsk, 2006, 315 p.

8. Kim, D.P. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lineynye sistemy. [Automatic control theory. Vol. 1. Linear systems.] Moscow: FIZMATLIT, 2003, 288 p. (in Russian).

9. Kaimov, E.V., Artyunin, A.I. Otsenka dinamicheskikh svoystv v sisteme s rychazhnymi svyazyami. [Estimation of dynamic properties in linkage system.] Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii: trudy XIX Baykal'skoy Vserossiyskoy konf. [Information and Mathematical Technologies in Science and Management: Proc. XIX Baikal All-Russian Conf.] Irkutsk, 2014, pp. 123–130 (in Russian).

10. Kaimov, E.V., Kashuba, V.B. Osobennosti rychazhnykh svyazey v skhemakh podvesok i priborov. [Linkage features in carriages and devices.] Perspektivy razvitiya i effektivnost' funktsionirovaniya transportnogo kompleksa yuga Rossii: trudy mezhd. nauchno-prakt. konf. [Development prospects and efficiency of transport complex in the south of Russia: Proc. Int. Sci.-Pract. Conf.] Rostov-on-Don, 2015, pp. 224–226 (in Russian).

11. Rocard, Y. General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949, 458 p.

Поступила в редакцию 23.06.2017
Сдана в редакцию 23.06.2017
Запланирована в номер 17.07.2017

Received 23.06.2017
Submitted 23.06.2017
Scheduled in the issue 17.07.2017

Об авторах:

Елисеев Сергей Викторович,
директор НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования Иркутского государственного университета путей сообщения (РФ, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15), доктор технических наук, профессор,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6876-8786
eliseev_s@inbox.ru

Орленко Алексей Иванович,
директор Красноярского института железнодорожного транспорта Иркутского государственного университета путей сообщения (РФ, 660028, г. Красноярск, ул. Ладо Кецховели, 89), кандидат технических наук, доцент,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6639-9059
Orlenko_AI@krsk.irgups.ru

Нгуен Дык Хуинь,
аспирант Иркутского государственного университета путей сообщения (РФ, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15),
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9003-5378
Huynhnd1987@gmail.com

Authors:

Eliseev, Sergey V.,
director, REC of High Technologies, System Analysis and Modeling, Irkutsk State Railway Transport Engineering University (RF, 664074, Irkutsk, ul. Chernyshevskogo, 15), Dr.Sci. (Eng.), professor,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6876-8786
eliseev_s@inbox.ru

Orlenko, Alexey I.,
director, Krasnoyarsk Institute of Rail Transport, Branch of Irkutsk State Transport Engineering University (RF, 660028, Krasnoyarsk, ul. Lado Ketskhovely, 89), Cand. Sci. (Eng.), associate professor,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6639-9059
Orlenko_AI@krsk.irgups.ru

Nguyen Duc Huynh,
postgraduate student, Irkutsk State Railway Transport Engineering University (RF, 664074, Irkutsk, ul. Chernyshevskogo, 15),
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9003-5378
Huynhnd1987@gmail.com